

Introdução a Tensores

Flavia A. Dias
(SPRACE)

Programa

□ Introdução

□ Geometria em 3 Dimensões

- Objetos Geométricos
- Geometria Métrica em 3 Dimensões
- Covariância e Simetria

□ Geometria em 4 Dimensões

- Espaço de Minkowski, Métrica e Transformações de Lorentz
- Quadrivetores e Tensores
- Contração, Índices Covariantes e Contravariantes
- Gradiente em Relatividade Especial
- Invariantes em Relatividade Especial
- Propriedades das Transformações de Lorentz

Bibliografia

- Notas de Aula, Robert L. Jaffe, Massachusetts Institute of Technology (MIT)
- An Introduction to Tensors for Students of Physics and Engineering, Joseph C. Kolecki, Glenn Research Center, Ohio
- A Quick Introduction to Tensor Analysis, R. A. Sharipov, Bashkir State University, Russia
- Introduction to Tensors, Joakim Strandberg
- Wikipedia

Introdução

Introdução

❑ Histórico

- Cálculo tensorial desenvolvido por Gregorio Ricci-Curbastrofoi (1890) e Tullio Levi-Civita (1900)
- Ganhou ampla aceitação com a introdução da teoria da relatividade geral (1915)

Um tensor é um objeto que amplia o conceito de escalar, vetor e matriz. Em física tratamos de campos tensoriais (análogo ao campo vetorial): associação de um tensor em cada ponto de um espaço geométrico, variando continuamente com a posição.

Alguns exemplos de tensores:

- Tensor métrico: http://en.wikipedia.org/wiki/Metric_tensor
- Tensor de difusão: http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_tensor_imaging
- Tensor de tensão (stress):
http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_%28physics%29
- Tensor de deformação (strain): http://en.wikipedia.org/wiki/Strain_tensor
- Tensor de elasticidade: http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_elasticity

❑ Exemplo

- Tensão (stress): medida da força exercida por unidade de área
- Tensor de tensão: operador linear que atuando em um vetor resulta em outro vetor

Geometria em 3 Dimensões

Objetos Geométricos

□ Rotações

Sejam os pontos:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

Em coordenadas cartesianas, define-se a distância como:

$$d^2(x, y) = \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2$$

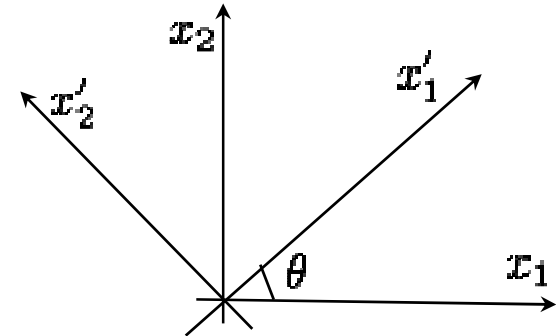
- Convenção de Somatórias:
Índices latinos repetidos: soma de 1 a 3.
- Classificação de objetos em Geometria:
Propriedades de transformações sob mudanças de coordenadas, em particular sob rotações.

– Rotação

Sejam dois referenciais S e S' relacionados por uma rotação (sem perda de generalidade, em torno do eixo z).

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$$



Usando a convenção de soma sobre índices repetidos:

$$x'_i = R_{ij} x_j \quad R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As coordenadas são definidas globalmente. Escrever $\vec{x}$ implica alguma escolha de origem. É mais fácil lidar com objetos definidos com respeito a uma origem específica.

– Exemplo:

Seja a diferencial dx_i ; no sistema S' , tem-se que:

$$dx'_i = R_{ij} dx_j \Rightarrow \frac{dx'_i}{dx_j} = R_{ij}$$

A transformação de diferenciais é simplesmente a regra da cadeia:

$$dx'_i = \left(\frac{dx'_i}{dx_j} \right) dx_j$$

Rotações preservam comprimento: não mudam a distância entre dois pontos. Matematicamente:

$$\begin{aligned} (ds)^2 = dx_i dx_i &\Rightarrow dx'_i dx'_i = R_{ij} R_{ik} dx_j dx_k = dx_j dx_j \\ (ds')^2 = dx'_i dx'_i &\Rightarrow R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk} \end{aligned}$$

ou seja, a matriz de rotação é ortogonal:

$$(R^T R)_{ij} = (R^T)_{im} R_{mj} = \delta_{ij} = (I)_{ij}$$

□ Escalares/Campos Escalares

Um *campo escalar* é uma função de coordenadas cujo valor em um dado ponto é independente do sistema de coordenadas. No entanto, pontos em uma coordenada são identificados diferentemente de pontos em outra, assim, a regra funcional pode ser diferente.

Se $\phi(x)$ é um escalar, então $\phi'(x') = \phi(x)$. A " ' " em $\phi(x)$ no novo sistema de coordenadas exprime que a função de x' é diferente do que era a função de x .

– Exemplo:

Temperatura é um escalar. Considere a temperatura de uma sala variando com a altura (x_2): $T(x) = ax_2$. Em um novo sistema de coordenadas, a temperatura é a mesma, o que implica:

$$T'(x') = ax_1' \sin \theta + ax_2' \cos \theta = ax_2$$

Assim, T' é uma função diferente de x' do que T é de x .

– Nota:

Considera-se, aqui, sempre transformações passivas: o sistema físico continua o mesmo, só escolhe-se novas coordenadas.

□ Vetores/Campos Vetoriais

Um campo vetorial é definido como um conjunto de três funções de coordenadas $v_i(x); i = 1, 2, 3$, as quais transformam sob rotações da mesma maneira que as coordenadas diferenciais dx_i :

$$v_i'(x') = \frac{dx_i'}{dx_j} v_j(x) = R_{ij} v_j(x)$$

O conceito elementar de vetor como uma direção e um tamanho está incluso nessa definição. É importante notar que v_i' e v_i representam o mesmo vetor, mas em eixos coordenados distintos. Diferentemente dos escalares, os componentes de um vetor de fato mudam sob rotação, pois são definidos ao longo de outros eixos.

– Exemplo:

Considere o campo vetorial $v_i(x) = (1, 0, 0)$, ou seja, cada ponto está relacionado com um vetor unitário na direção $\hat{e}_1$. Aplicando uma rotação:

$$v_i' = v_1 \cos \theta, v_2' = -v_1 \sin \theta$$

Sob rotação dos eixos coordenados as componentes do vetor se transformam em outras, mas o vetor continua o mesmo. São vetores a velocidade, os campos elétrico e magnético.

□ Tensores/Campos Tensoriais

Tensores são uma generalização natural e simples de vetores. Considere o produto externo de dois vetores, que é o conjunto de 9 números $u_i v_j$ que podem ser, por conveniência, representados como uma matriz 3x3:

$$T_{ij} \equiv u_i v_j = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}$$

É fácil escrever as transformações para T_{ij} sabendo as leis para vetores:

$$T'_{ij} = R_{ik} R_{jl} T_{kl}$$

Qualquer objeto que transforma, sob rotações, como a equação acima, é chamado de tensor de ordem 2. Um tensor de ordem 1 é um vetor, enquanto que um escalar é um tensor de ordem 0. A transformação para um tensor de ordem n é:

$$T_{i_1, i_2, \dots, i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1, j_2, \dots, j_n}$$

Nem todo tensor é um produto de dois vetores. Segue um exemplo muito simples e ilustrativo.

– Exemplo:

A equação para um elipsóide centrado na origem é:

$$x_i x_j A_{ij} = 1$$

Se o sistema de coordenadas é rotacionado o elipsóide vai ser descrito de uma forma similar no novo sistema de coordenadas:

$$x_i' x_j' A_{ij}' = 1$$

Para provar que A_{ij} é um tensor, faz-se a transformação explicitamente:

$$R_{ik} x_k R_{jl} x_l A_{ij}' = 1$$

$$x_k x_l (R_{ik} R_{jl} A_{ij}') = 1$$

Comparando com a equação original,

$$A_{kl} = R_{ik} R_{jl} A_{ij}'$$

Que está ao contrário. Para consertar, multiplica-se por $R_{mk} R_{nl}$ e soma-se em k e l:

$$R_{mk} R_{nl} A_{kl} = (R_{ik} R_{mk})(R_{jl} R_{nl}) A_{ij}' = \delta_{im} \delta_{jn} A_{ij}' = A_{mn}'$$

Que é a lei de transformação de um tensor de ordem 2; Assim, A_{ij} é um tensor.

– Exemplos de Tensores

- Momento de Inércia:

$$I_{ij} \equiv \int d^3x \rho_N(x) (\delta_{ij} x^2 - x_i x_j)$$

- Momento de Quadrupolo:

$$Q_{ij} \equiv \int d^3x \rho_E(x) (3x_i x_j - \delta_{ij} x^2)$$

Pode-se verificar que todos satisfazem as equações de transformação, de maneira análoga ao que foi feito com o exemplo do elipsóide.

– Delta de Kronecker

No sistema de coordenadas S define-se: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases}$

Agora supondo que δ_{ij} é um tensor, e calculando suas componentes em qualquer outro sistema de coordenadas S' :

$$\delta_{ij} = R_{ik} R_{jl} \delta_{kl} = R_{ik} R_{jk}$$

Mas $R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij} \Rightarrow \delta_{ij'} = \delta_{ij}$. Então este é um tensor cujas componentes são iguais em todos os sistemas de coordenadas.

Assim, o delta de Kronecker é um tensor e suas componentes, em todos os sistemas de coordenadas, são:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Tensor Totalmente Antisimétrico ϵ_{ijk}

O símbolo ϵ_{ijk} é definido por:

$$\epsilon_{123} = 1$$

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji}$$

ϵ_{ijk} é ímpar sob a permutação de qualquer índice, de onde segue-se que é nulo se dois índices quaisquer são iguais. Definindo um tensor que em um referencial tem os valores de ϵ_{ijk} , e calculando suas componentes em outro referencial:

$$\epsilon'_{ijk} = R_{im} R_{jn} R_{kp} \epsilon_{mnp}$$

Usando a regra para o determinante de uma matriz 3x3:

$$\epsilon_{ijk} \det M \equiv M_{im} M_{jn} M_{kp} \epsilon_{mnp} \Rightarrow \epsilon'_{ijk} = \det R \epsilon_{ijk}$$

Usando a propriedade $\det(R) = \det(R^T)$ pode-se concluir que:

$$\det(RR^T) = (\det R)^2 = 1 \Rightarrow \det R = \pm 1$$

Essas transformações com $\det R = 1$ são chamadas de rotações **próprias**, enquanto que aquelas com $\det R = -1$ são **impróprias** e envolvem reflexões ($\vec{x}' = -\vec{x}$).

A composição de uma reflexão seguida por uma rotação (ou vice versa) tem $\det R = \det R_{refl} R_{rot} = (-1)(1) = -1$ e é, portanto, imprópria.

Supondo agora que deseja-se ter ϵ_{ijk} com a definição dada anteriormente em todos os sistemas de coordenadas:

Claramente as leis de transformações citadas não o permitem: em diferentes referenciais, $\epsilon'_{ijk} = \det R \epsilon_{ijk}$ introduz mudanças de sinais na definição de ϵ em diferentes referenciais.

Se ϵ_{ijk} tem o mesmo valor em todos os referenciais, mesmo se refletido ou rotacionado, têm-se:

$$\epsilon'_{ijk} = (\det R) R_{im} R_{jn} R_{kp} \epsilon_{mnp}$$

Essa é a lei de transformação correta nesse caso.

Um objeto que transforma como um tensor exceto por uma mudança de sinal extra sob reflexão ($\det R = -1$) é um **pseudotensor**.

ϵ_{ijk} é um pseudotensor de ordem 3.

□ Algumas Conseqüências da Geometria de Tensores

- O produto vetorial de dois vetores é um vetor

Seja, em um sistema S : $w_i = (\vec{u} \times \vec{v})_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$.

Em S' :

$$w_i' = \epsilon_{ijk}' u_j' v_k' \quad \text{mas}$$

$$\epsilon_{ijk}' = \epsilon_{mnp} R_{im} R_{jn} R_{kp} (\det R) \quad \text{e} \quad \begin{cases} u_j' = R_{jq} u_q \\ v_k' = R_{kr} v_r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w_i' &= \epsilon_{mnp} R_{im} (R_{jn} R_{jq}) (R_{kp} R_{kr}) u_q v_r (\det R) \\ &= \epsilon_{mnp} R_{im} \delta_{nq} \delta_{pr} u_q v_r (\det R) \\ &= R_{im} (\epsilon_{mnp} u_n v_p) (\det R) \\ &= (\det R) R_{im} w_m \end{aligned}$$

Como w_i' transforma com um fator extra de $\det R$, é um pseudovetor, e tem propriedades opostas sob reflexão do que um vetor.

- Exemplo: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Sob reflexão, $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$; $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ mas $\vec{L} \rightarrow +\vec{L}$.

- As componentes de um tensor antisimétrico de ordem 2 formam um pseudovetor. (i.e., um produto vetorial)

Seja $T_{ij} = -T_{ji}$ que tem a forma $T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & t_3 & -t_2 \\ -t_3 & 0 & t_1 \\ t_2 & -t_1 & 0 \end{pmatrix}$

Note que existem apenas 3 entradas independentes não nulas.
Reescrevendo como:

$$T_{ij} = \epsilon_{ijk} t_k$$

As transformações conhecidas para ϵ_{ijk} e T_{ij} fazem t_k um pseudovetor:
Usando $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$:

$$t_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} T_{ij} \quad ; \text{ Rotacionando:}$$

$$\begin{aligned} t_k' &= \frac{1}{2} \epsilon_{kij}' T_{ij}' = \frac{1}{2} \epsilon_{mnp} R_{km} R_{in} R_{jp} R_{is} R_{jr} T_{sr} (\det R) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{mnp} R_{km} \delta_{ns} \delta_{pr} T_{sr} (\det R) = (\det R) R_{km} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{mnp} T_{np} \right) \\ &\Rightarrow t_k' = (\det R) R_{km} t_m \end{aligned}$$

- Qualquer tensor de ordem 2 pode ser descrito como uma combinação de um elipsóide com um pseudovetor

Qualquer tensor pode ser escrito como uma soma de um tensor simétrico e um antisimétrico:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \quad \text{com} \quad \begin{aligned} T_{ij}^S &= T_{ji}^S \\ T_{ij}^A &= -T_{ji}^A \end{aligned}$$

$$= T_{ij}^S + T_{ij}^A$$

Já mostrou-se que T_{ij}^A é equivalente a um pseudovetor. Agora, considerando o elipsóide:

$$x_i x_j T_{ij} = 1$$

Somente T_{ij}^S contribui para o elipsóide, pois

$$x_i x_j T_{ij}^A = -x_i x_j T_{ji}^A = -x_j x_i T_{ji}^A = 0$$

Assim a parte simétrica de T_{ij} define um elipsóide.

O estudo de um tensor de ordem 2 é somente tão complicado quanto o estudo da geometria de um elipsóide. A parte de pseudovetor pode ser tratada usando a notação vetorial, sem o formalismo tensorial.

□ Gradiente: Dois Tipos de Vetores

Considere o gradiente de um campo escalar $\phi(x)$:

$$\partial_i \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

Usando a regra da cadeia para a transformação de coordenadas $x_i' = R_{ij}x_j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'}{\partial x_i'} &= \frac{\partial \phi'}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \quad \text{mas } \phi'(x') = \phi(x) \text{ para um escalar;} \\ &\Rightarrow \partial_i' \phi' = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \partial_j \phi \end{aligned}$$

Usando $x_i' = R_{ij}x_j$ e $R^T R = 1$:

$$x_j = R_{ji}^T x_i' = R_{ij} x_i' \Rightarrow \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = R_{ij} \Rightarrow \partial_i' \phi' = R_{ij} \partial_j \phi$$

Assim, o gradiente de um escalar é um vetor. Note porém que para vetores, a transformação é diferente:

$$v_i' = \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \right) v_j \qquad \partial_i' \phi' = \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \right) \partial_j \phi$$

Para rotações ($x_i' = R_{ij}x_j$), $\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}$ e v_i e $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ transformam identicamente.

Suponha agora outros tipos de mudanças de coordenadas, que não preserve tamanhos (como as rotações e as reflexões):

$$x_i' = x_i'(x_1, x_2, x_3) = f_i(x_1, x_2, x_3)$$

Ou seja, cada nova coordenada é uma função arbitrária das antigas. As coordenadas diferenciais ainda se transformam como:

$$dx_i' = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j} dx_j$$

E o gradiente obedece:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

Em geral, $\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} \neq \frac{\partial x_j}{\partial x_i'}$ (a igualdade se dá em rotações).

Há dois tipos de vetores:

- **vetores contravariantes**, que se transformam como as coordenadas diferenciais;
- **vetores covariantes**, que se transformam como o gradiente.

Geometria Métrica em 3 Dimensões

□ A métrica

A métrica é o tensor de ordem 2 que converte coordenadas diferenciais no elemento de tamanho rotacionalmente invariante:

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$$

Para coordenadas cartesianas num espaço Euclidiano, $g_{ij} = \delta_{ij}$. Em outros referenciais, pode mudar. Por exemplo, em coordenadas esféricas:

$$dx_1 = dr; \quad dx_2 = d\theta; \quad dx_3 = d\phi$$

$$\Rightarrow ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$\Rightarrow g_{11} = 1; \quad g_{22} = r^2; \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

Concentraremos a atenção em coordenadas cartesianas. Como $g_{ij} = \delta_{ij}$, já demonstramos que é um tensor e é o mesmo em todos os referenciais.

□ Contração

Se qualquer tensor é multiplicado pelo tensor métrico e os índices são somados, então o objeto resultante transforma como se os índices somados não existissem. O processo de multiplicar pelo tensor métrico para diminuir a ordem do tensor é chamado de **contração**.

– Exemplo:

Considere T_{ij} , um tensor de ordem 3:

$$\lambda_i = g_{jk} T_{ijk} = T_{ijj}$$

Que é um tensor de ordem 1, um vetor.

Prova:

$$\begin{aligned}\lambda_i' &= g_{jk}' T_{ijk}' \\ g_{jk}' &= \delta_{jk}' = \delta_{jk} \\ \Rightarrow \lambda_i' &= \delta_{jk} R_{im} R_{jn} R_{kp} T_{mnp} = R_{im} (R_{jn} R_{jp}) T_{mnp} \\ &= R_{im} \delta_{np} T_{mnp} = R_{im} (g_{np} T_{mnp}) \\ &= R_{im} \lambda_m\end{aligned}$$

□ Invariantes

Uma aplicação muito útil da contração é a construção de escalares a partir de tensores de ordem mais alta. Esses invariantes são úteis porque transformam de uma maneira muito simples sob rotações de coordenadas.

O produto escalar $((v \cdot w) = v_i w_j g_{ij})$ e traço $(tr T = T_{jj} = g_{jk} T_{jk})$ de um tensor de ordem dois são invariantes simples.

Outros exemplos:

- Produto totalmente contraído de dois tensores $S_{ij} T_{ij}$, que pode ser pensado como o traço do tensor de ordem 2 $S_{ik} T_{kj}^T$.
- Triplo produto escalar de três vetores, $\epsilon_{ijk} u_i v_j w_k$, que não é exatamente um invariante pois troca de sinal sob reflexões:

$$\epsilon_{ijk} 'u_i 'v_j 'w_k ' = (\det R) \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k$$

Covariância e Simetria

Suponha que as leis da física não dependem da orientação de um sistema de coordenadas. Isso significa que a forma das leis devem ser as mesmas em todos os referenciais relacionados entre si por rotação. Assim, nenhum experimento poderia detectar um sistema de referência preferencial.

Isso acontecerá se e somente se todas as equações da física lidarem com objetos do mesmo tipo geométrico. Vetores equacionados com vetores, tensores com tensores, e etc.

– Exemplo:

Segunda Lei de Newton: $F_i = m\ddot{x}_i$

$$F_i' = R_{ij}F_{ji}x_i' = R_{ij}x_j$$

$$m' = m \quad m \text{ é um escalar;}$$

Equações cujos lados direito e esquerdo se transformam da mesma maneira são chamados de **covariantes** (sem relação com vetores covariantes e contravariantes). Assim a **invariância** ou **simetria** de uma teoria sob rotações implica na **covariância** das leis da física sob essas transformações.

– Exemplo:

O campo magnético $\vec{B}$ é um pseudovetor. Assim, a força

$$F_i = eB_i$$

Viola a simetria de reflexão (carga é um escalar), porque sob reflexões,

$$F_i' = -F_i \text{ mas } B_i' = -(\det R)B_i = +B_i ; \text{ então:}$$

$$F_i' = -eB_i'$$

ou seja, uma força diferente no sistema de coordenadas refletido. Por outro lado, a força correta está OK:

$$F_i = e(\vec{v} \times \vec{B})$$

Pois o produto vetorial de um vetor e um pseudovetor é novamente um vetor.

– Nota:

A famosa descoberta da violação de paridade, ou simetria de reflexão, em forças fracas em 1957 envolve uma equação como essa. As equações de movimento de interações fracas mudam sob reflexão.

Geometria em 4 dimensões

Espaço de Minkowski e Transformações de Lorentz

4 dimensões – 3 coordenadas espaciais $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e uma coordenada temporal $x^0 \equiv ct$. Os quatro números $x^\mu; \mu = 0, 1, 2, 3$ formam o quadrivetor x :

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

- Índices gregos sub ou sobrescritos denotam índices que vão de 0 a 3.

O espaço de todos os pontos x^μ é chamado de **espaço de Minkowski** e (em ausência da gravidade) é um bom candidato para o Universo.

Define-se a distância nesse espaço utilizando-se a métrica: a distância entre dois pontos x^μ e y^μ é:

$$s^2(x, y) = (x^0 - y^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i - y^i)^2$$

Ou, em termos de diferenciais $x^\mu - y^\mu \rightarrow dx$:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^i dx^i)$$

Reescrevendo em termos de uma métrica:

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}$$

Onde a convenção de somatória é que todo índice grego repetido soma de 0 a 3.

O **tensor métrico** $g_{\mu\nu}$ pode ser escrito, portanto, como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

É convenção usar $g_{\mu\nu}$ ou $-g_{\mu\nu}$ como a métrica. No último caso,

$$ds^2 = dx^i dx^i - (dx^0)^2$$

Para a escolha que fizemos, intervalos do tipo tempo tem $ds^2 > 0$ e intervalos do tipo espaço tem $ds^2 < 0$. Esta é a chamada métrica de West Coast, e é utilizada por J.D. Jackson.

A outra escolha inverte os sinais de eventos do tipo espaço e tempo e é conhecida como a métrica de East Coast.

As Transformações de Lorentz (T.L.) tem o mesmo papel com respeito ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que as rotações em espaços Euclidianos tridimensionais.

As T.L. foram definidas para deixar ds^2 inalterado em referenciais associados por T.L.

Escrevendo

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Onde Λ^{μ}_{ν} é a matriz usual das Transformações de Lorentz:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aqui usamos a notação de rapidez ($\cosh \phi \equiv \gamma$; $\sinh \phi \equiv \beta\gamma$) e a T.L. particular que escrevemos corresponde de uma mudança de um referencial K para outro K' se movendo com velocidade $+\beta c$ na direção x^1 .

A invariância de ds^2 coloca uma restrição fundamental em Λ^{μ}_{ν} :

$$(ds')^2 = (ds)^2$$

$$g_{\mu\lambda} dx'^{\mu} dx'^{\lambda} = g_{\nu\sigma} dx^{\nu} dx^{\sigma}$$

$$g_{\mu\lambda} \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\lambda}_{\sigma} dx^{\nu} dx^{\sigma} = g_{\nu\sigma} dx^{\nu} dx^{\sigma}$$

O que requer

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\lambda}_{\sigma} g_{\mu\lambda} = g_{\nu\sigma}$$

Isso é o análogo de $R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk}$, e diz que as T.L. são ortogonais com respeito à métrica g como as rotações são ortogonais com respeito à métrica δ .

Note que as rotações são um subconjunto das Transformações de Lorentz. Uma rotação mistura as coordenadas espaciais mas deixa a coordenada temporal sozinha:

$$dx'^0 = dx^0$$

$$dx'^i = R^i_j dx^j$$

Como R deixa a distância Euclidiana inalterada, a expressão preserva ds^2 . T.L. que transformam para um referencial em movimento sem rotação são chamadas de **boost**.

No quadriespaço uma rotação em torno do eixo x^3 é escrita como:

$$\Lambda^\mu_\nu(ROT) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A T.L. mais geral possível sempre pode ser escrita como uma rotação seguida de um **boost** seguido de uma nova rotação.

As reflexões também estão incluídas entre as T.L., e são diferenciadas das outras por terem $\det \Lambda = -1$. Em 4 dimensões, introduz-se também reflexão no tempo. Uma reversão temporal pura tem $\det \Lambda = -1$ e uma reflexão nas 4 coordenadas tem $\det \Lambda = 1$. Uma T.L. **própria** é aquela que não tem reflexões no espaço e/ou tempo, já que para uma T.L. própria (exceto no caso $x_\mu = -x_\mu$) $\det \Lambda = 1$. As T.L. **impróprias** incluem reflexões e reversões temporais e tem $\det \Lambda = -1$, com exceção do caso já citado, que tem o determinante positivo.

Quadrivetores e Tensores

Quadrivetor: qualquer conjunto de 4 números v^μ que, sob Transformações de Lorentz, se transforma como a coordenada diferencial dx^μ :

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$$

$$v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu$$

– Exemplos:

Quadrimento: $p = (E / c, \vec{P})$

Quadricorrente: $J = (c\rho, \vec{J})$

Potenciais Eletromagnéticos: $A = (\phi / c, \vec{A})$

Um quadrivetor é definido em analogia a tensores no espaço tridimensional.

Seja $T^{\mu\nu}$ um quadritensor, então, no referencial transformado:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\tau T^{\sigma\tau}$$

As componentes de um quadritensor ou quadrivetor se misturam umas com as outras exatamente como vetores e tensores ordinários o fazem sob rotações.

Índices Covariantes e Contravariantes

Como no caso de 3 dimensões, podemos formar tensores de ordens mais baixas contraindo com o tensor métrico.

– Exemplo:

Considere os quadritensores de ordem 2: $S^{\mu\nu}$ e $T^{\lambda\sigma}$.

Então $V^{\mu\sigma} = S^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} T^{\lambda\sigma}$ é um tensor de ordem 2 novamente.

Prova:

$$\begin{aligned} V^{\mu\sigma} &= S^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} T^{\lambda\sigma} \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta S^{\alpha\beta} g_{\nu\lambda} \Lambda^\lambda_\gamma \Lambda^\sigma_\tau T^{\gamma\tau} \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\sigma_\tau \underbrace{(\Lambda^\nu_\beta \Lambda^\lambda_\gamma g_{\nu\lambda})}_{g_{\beta\gamma}} S^{\alpha\beta} T^{\gamma\tau} \\ &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\sigma_\tau V^{\alpha\tau} \end{aligned}$$

Notação de contração com a métrica $g_{\mu\nu}$: Introduzindo os índices subscritos de acordo com as regras:

$$\begin{aligned}v_\mu &= g_{\mu\nu} v^\nu \\T_\alpha^\beta &= g_{\alpha\gamma} T^{\gamma\beta} \\T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta} &= g_{\beta x_j} T^{\alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_n}\end{aligned}$$

O único efeito computacional de “abaixar um índice” é introduzir um pacote de sinais menos. Se

$$v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$$

Então

$$v_\mu = (v^0, -v^1, -v^2, -v^3)$$

– Exemplo:

O produto de dois quadrivetores não muda sob T.L.:

$$g_{\mu\nu} w^\mu v^\nu \equiv w_\nu v^\nu = w^0 v^0 - \vec{w} \cdot \vec{v}$$

Definindo $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \Rightarrow g_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ com δ_α^γ matriz unitária 4x4.

$$\Rightarrow g^{\lambda\mu} v_\mu = g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} v^\nu = \delta^\lambda_\nu v^\nu = v^\lambda$$

Pode-se, agora, abaixar e levantar índices à vontade.

– Exemplo:

$$T^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T_{\alpha}^{\beta}$$

Se T_{α}^{β} está na forma:

$$T_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} T_0^0 & T_0^j \\ T_i^0 & T_i^j \end{pmatrix} \text{ aqui } j \text{ e } i \text{ vão de } 0 \text{ a } 3: \text{ uma notação compacta para essa matriz } 4 \times 4.$$

Então:

$$T^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} T_0^0 & -T_0^j \\ -T_i^0 & T_i^j \end{pmatrix}$$

Um vetor com índice acima é chamado de **vetor contravariante**. Com índice abaixo, é chamado de **covariante**.

O mesmo se aplica para tensores: $T^{\mu\nu}$ é contravariante e $T_{\mu\nu}$ é covariante. Um tensor com alguns índices acima e outros abaixo é chamado de **tensor misto**.

Ao discutir rotações, definimos vetores contravariantes como aqueles que transformam como coordenadas diferenciais:

$$v_i' = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} v_j$$

E vetores covariantes como aqueles que se transformam como gradientes:

$$w_i' = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} w_j$$

Estudando Relatividade Especial, definimos vetor contravariante como aqueles que se transformam sob L.T. como as coordenadas diferenciais:

$$v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} v^{\nu}$$

Vetores covariantes foram definidos pela relação:

$$v_{\mu} = g_{\mu\nu} v^{\nu}$$

Agora mostraremos que as definições são equivalentes.

Da definição das T.L.,

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Rightarrow v'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu} \quad \star$$

A correspondência seria completa se mostrássemos que:

$$v'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} v_{\nu}$$

Para mostrá-la, multiplicando $\star$ por $g_{\sigma\mu}$ e somando em μ , e substituindo

Tensores $v^{\nu} \rightarrow g^{\nu\lambda} v_{\lambda}$:

$$g_{\sigma\mu} v'^{\mu} = v'_{\sigma} = g_{\sigma\mu} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) g^{\nu\lambda} v_{\lambda}$$

Começando com $\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\lambda}_{\sigma} g_{\mu\lambda} = g_{\nu\sigma}$ e lembrando que $\Lambda^{\mu}_{\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} g_{\mu\lambda} = g_{\nu\sigma}$$

Multiplicando por $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\tau}} \frac{1}{2}$ e usando a regra da cadeia para derivadas parciais:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\tau}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\tau}} = \delta^{\mu}_{\tau} \text{ para obter } \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} g_{\tau\lambda} = g_{\nu\sigma} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\tau}}$$

Finalmente, multiplicando ambos os lados por $g^{\alpha\sigma}$ e somando em σ :

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\tau}} = g^{\alpha\sigma} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} g_{\tau\lambda}$$

Que é justamente o que gostaríamos de provar, se renomearmos os índices

$$\alpha \rightarrow \lambda; \tau \rightarrow \sigma; \sigma \rightarrow \nu; \lambda \rightarrow \mu$$

Resumindo e Recapitulando...

- Vetores Contravariantes:

Transformam sob T.L. como coordenadas diferenciais:

$$v'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} v^{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu}$$

- Vetores Covariantes:

Transformam sob T.L. da maneira oposta:

$$v'_{\mu} = g_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\nu} g^{\nu\lambda} v_{\lambda} = \Lambda_{\mu}^{\lambda} v_{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} v_{\lambda}$$

- Abaixando e Levantando Índices:

Vetores covariantes e contravariantes são relacionados através do tensor métrico:

$$\begin{aligned} v_{\mu} &= g_{\mu\nu} v^{\nu} \\ v^{\lambda} &= g^{\lambda\mu} v_{\mu} \end{aligned}$$

- Contração:

Índices relacionados pelo tensor $g_{\mu\nu}$ não mais se transformam:

$$T^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} S^{\lambda\alpha} = T^{\mu\nu} S_{\nu}^{\alpha} \equiv W^{\mu\alpha}$$

Gradiente em Relatividade Especial

O protótipo do vetor covariante é o gradiente de um escalar. Considere $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ onde $x^\mu = (x^0, +\vec{x})$ é a coordenada do vetor contravariante. Considere dois referenciais S e S' relacionados por T.L. e use a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu}$$

Comparando com $v'_\mu = g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma_\nu g^{\nu\lambda} v_\lambda = \Lambda_\mu^\lambda v_\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} v_\lambda$ conclui-se que $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ é covariante e o escrevemos como:

$$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, \vec{\nabla} \phi \right)$$

Podemos definir uma derivada contravariante diferenciando com respeito às coordenadas covariantes:

$$\partial^\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, -\vec{\nabla} \phi \right)$$

Invariantes em Relatividade Especial

Qualquer objeto totalmente contraído é um invariante (i.e., um escalar) sob Transformações de Lorentz. Introduzimos contração usando o tensor métrico, mas podemos usar levantamento e abaixamento de índices para tornar mais simples:

- contrair dois índices = levantar um, diminuir o outro e somar.

– Exemplo:

$T_{\alpha\beta}$ e $S_{\gamma\delta}$ são dois tensores, um tensor de ordem dois pode ser formado pela contração:

$$T_{\alpha\beta} S^{\beta\alpha} = T_{\alpha\beta} S_{\gamma\delta} g^{\beta\gamma}$$

Um escalar pode ser formado contraindo ainda α e δ :

$$T_{\alpha\beta} S^{\beta\alpha} = \text{escalar} = T_{\alpha\beta} S_{\gamma\delta} g^{\beta\gamma} g^{\alpha\delta}$$

Para provar que é um escalar, faça T.L. em ambos os lados:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} &= \Lambda_{\alpha}^{\gamma} \Lambda_{\beta}^{\delta} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} T_{\gamma\delta} S^{\mu\nu} \\ &= (\Lambda_{\alpha}^{\gamma} \Lambda_{\mu}^{\alpha}) (\Lambda_{\beta}^{\delta} \Lambda_{\nu}^{\beta}) T_{\gamma\delta} S^{\mu\nu} \\ &= \delta_{\mu}^{\gamma} \delta_{\nu}^{\delta} T_{\gamma\delta} S^{\mu\nu} = T_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \end{aligned}$$

□ Alguns Invariantes Importantes:

- O produto escalar de dois vetores:

$$\begin{aligned}v^\mu w_\mu &= (v^0 w_0 + v^1 w_1 + v^2 w_2 + v^3 w_3) \\&= (v^0 w^0 - v^1 w^1 - v^2 w^2 - v^3 w^3) \\&= (v^0 w^0 - \vec{v} \cdot \vec{w})\end{aligned}$$

- O traço do produto de dois tensores:

$$(F \cdot G) = F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} G^{\lambda\sigma} g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}$$

- A quadridivergência:

O sinal menos que causa problemas: Considere um vetor contravariante $v^\mu = (v^0, \vec{v})$. Então $\partial_\mu v^\mu$ é um invariante.

Mas

$$\partial_\mu v^\mu = \left(\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu}, \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right)$$

Note a diferença:

$$w_\mu v^\mu = (w^0 v^0 - \vec{w} \cdot \vec{v})$$

Esse sinal menos é essencial no entendimento das propriedades de transformações de muitos objetos em eletromagnetismo.

Propriedades das Transformações de Lorentz

– $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é o análogo de ϵ_{ijk} .

$\epsilon^{0123} = 1$ e troca de sinal sob qualquer permutação de seus índices. Fica +1 sob permutações cíclicas e é nulo se dois índices são iguais.

$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ é um pseudotensor de ordem 4 e é numericamente o mesmo em todos os sistemas de coordenadas. Explicitamente:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \Lambda_{\gamma}^{\lambda} \Lambda_{\delta}^{\sigma} (\det \Lambda) \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}; \quad \epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = -1$$

– O elemento de volume d^4x .

$d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ é invariante, mas um pseudoescalar:

$$d^4x' = (\det \Lambda) d^4x$$

– O quadrirotacional.

O objeto $\partial_{\mu} v_{\nu} - \partial_{\nu} v_{\mu} = F_{\mu\nu}$ onde v_{μ} é um vetor covariante, é um tensor antisimétrico de ordem 2.

$$F_{\mu\nu}' = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F_{\alpha\beta}$$